滑らかな数の3乗の和について(解析的整数論)

AUTHOR(S):

川田, 浩一

CITATION:

川田, 浩一. 滑らかな数の3乗の和について(解析的整数論). 数理解析研究所講究録 2006, 1512: 109-117

ISSUE DATE:

2006-08

数理解析研究所講究録
1512巻 2006年 109-117

滑らかな数の3乗の和について.

Koichi KAWADA (川田 浩一)
Faculty of Education, Iwate University
(岩手大学 教育学部)

1. 序 — 滑らかな数の Waring 問題.

“滑らかな数” とは, “smooth number” の和訳のつもりであるが, Harcos [6] の Introduction には, 小さな素因数しかもたない数をそう呼ぶのは Pomerance による, とある. 一方で, “integers without large prime factors” のような直接的な表現も使われていて, こちらを好む人もいるようである. どうでもいいことではあるが, 日本語の語感として,「数」に対して「なめらかな」という艶っぽい形容詞がつくというのは, なかなか味わいが感じられて個人的にはとても気に入っているので, 日本国内で広く通用するようになれば嬉しいと思っている.

さて, 1985年頃, Erdös は「充分大きいすべての自然数 N は, $N^{1/3}$ より大きい素因数をもたない2つの自然数の和で表せるか」という問題を述べたそうで*, 筆者の知る限りは, これが滑らかな数に対する初めての加法的問題である. この Erdös の問題は, 素数の和に関する Goldbach 問題にあたるものを, 滑らかな数に対して考察せよ, という趣旨とみることができるが, この方向の研究には, Fujii [5], Balog–Sárközy [2], [3], Balog [1] などがある.

そして1997年, Harcos [6] は Waring 問題を滑らかな数に対して考察した. つまり彼は, 2以上の自然数 k に対して, 滑らかな数の k 乗の和で自然数を表す問題を議論した. この, 滑らかな数に対する Waring 問題は, 無論 Vaughan と Wooley による Waring 問題に関する一連の研究 (例えば [9], [10]) と関係するが, そのあたりの事情について記しておこう.

まず, $P \geq R \geq 2$ とし, R より大きい素因数をもたない P 以下の自然数全部の集合を $\mathscr{A}(P,R)$ で表し, $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$ と書くことにして,

$$f_k(\alpha) = \sum_{1\leq x\leq P} e(x^k\alpha), \qquad g_k(\alpha) = \sum_{x\in\mathscr{A}(P,R)} e(x^k\alpha)$$

*1987年3月17日に received となっている論文 [1] で, Balog は「2年前に Erdös がその問題を述べた」と書いている. 実際, この論文 [1] で Balog はその問題を肯定的に解決した.

とおく．Rは，とりあえず，Pの非常に小さいべき乗よりも小さいくらい，としておく．Waring問題にcircle methodを応用する際，変数を滑らかなものに限る場合は$g_k(\alpha)$のような指数和を使い，変数に何も条件をつけない場合は古典的なWeyl和$f_k(\alpha)$を使うことになる．いずれにしろ，circle methodの議論においては，こういった指数和に対する2つのタイプの結果が重要となる．一つは指数和の平均値に対する評価であり，もう一つはWeylの不等式のような，minor arcにおける指数和の絶対値の評価である．よって，これらの評価について，$f_k(\alpha)$と$g_k(\alpha)$のどちらの方に対してより強いことが知られているかを比べることになる．この比較のために，両指数和に対する自明な評価はほぼ変わらないことを注意しておく．実際，$R \geq P^\eta$ならば$\sharp\mathscr{A}(P,R) \gg_\eta P$であり，どちらの指数和も$P$が自明な上界となっている．

指数和の平均値に関して現在知られている結果では，$f_k(\alpha)$に対するものよりも$g_k(\alpha)$に対するものの方が常に質が良い[†]．これは前述のVaughan，Wooleyの仕事の主要部である．例えば，

$$\int_0^1 |f_3(\alpha)|^6 \ll P^{7/2+\varepsilon}, \qquad \int_0^1 |g_3(\alpha)|^6 \ll P^{3.2496} \tag{1}$$

である[‡]．前者はHuaの不等式から，後者はWooley [11] からそれぞれ従う．つまり，このような平均値評価に関する限りは，変数を滑らかな数に限った方が議論が楽になる，あるいは，結果が良くなるのである．

一方，minor arc上の指数和の評価については，Weylの不等式から従う結果と，平均値の評価からVinogradov流に導かれる結果とがあり，kが小さいときは前者の方が，kが大きいときは後者の方が勝る．平均値の評価は$g_k(\alpha)$に対するものの方が良いわけだから，後者が勝る場合は，minor arc上の評価についても$f_k(\alpha)$より$g_k(\alpha)$の方が良いことになるが，実際，現在は7以上のkに対して，そうなっている．Waring問題では，標準的にはminor arc $\mathfrak{m}$は，

$$\mathfrak{m} = \{\alpha \in [0,1) \,:\, \forall q \leq P,\ \forall a \in \mathbb{Z},\ |q\alpha - a| > P^{1-k}\}$$

などと定義されるが，例えば，$k=7$の場合，

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}} |f_7(\alpha)| \ll P^{63/64+\varepsilon}, \qquad \sup_{\alpha\in\mathfrak{m}} |g_7(\alpha)| \ll P^{0.983203}$$

である．前者はWeylの不等式，後者はVaughan–Wooley [9] による．$63/64 = 0.984375$だから，$g_7(\alpha)$に対する評価の方が良い．また，例えば，$k=3$の場合，

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}} |f_3(\alpha)| \ll P^{3/4+\varepsilon}, \qquad \sup_{\alpha\in\mathfrak{m}} |g_3(\alpha)| \ll P^{9/10+\varepsilon} \tag{2}$$

[†]正確に言えば，どちらでも質が同じ，ということはある．

[‡]εを含む不等式は，任意に固定した正のεに対して成立することを示す．

であり，前者は再び Weyl の不等式，後者は Brüdern–Wooley [4] によるが，今度は逆に $f_3(\alpha)$ に対する評価の方が良い．

いま見たように，7 以上の k に対しては，平均値評価も minor arc 上での上界も，$g_k(\alpha)$ に対するものの方が強いから，こういう場合は変数を滑らかにすることに何の障害もない — というより，そうした方が良い結果が得られることになる．実際，Vaughan–Wooley は，そういう k に対しては，“滑らかな数に対する Waring 問題” そのものを扱っているといえる．例えば彼らは [9] で $G(7) \leq 33$ を示した[§]が，彼らが直接証明したのは，「任意に固定した正の η に対して，十分大きい自然数 n は，n^η よりも大きい素因数をもたない 33 個の自然数の 7 乗の和で表せる」ということであった．この命題における n^η を，適当な正定数 c に対する $\exp(c\sqrt{\log n \log\log n})$ という量で置き換えることができるが[¶]，そういうことは，例えば Balog–Sárközy [2] などをみれば，まあ，単純作業と言っていいだろう．いずれにしても，7 以上の k の場合は，“滑らかな数に対する Waring 問題” は，Harcos [6] より前に Vaughan と Wooley によって考察されていた，と言うこともできよう．

しかし，k が 6 以下のときは，平均値の評価は $g_k(\alpha)$ に対するものの方が良いが，minor arc 上の評価は $f_k(\alpha)$ に対するものの方が良い，ということになる．よって，当然，平均値を使う場面では $g_k(\alpha)$ が現れるように，minor arc での上界を使う場面では $f_k(\alpha)$ が現れるように，議論を組み立てよう，と思うのが自然で，実際，言うまでもなく，Vaughan–Wooley [9] の仕事もそうなっている．従って，こういう場合にすべての k 乗数を滑らかなものに制限しようとすると，$f_k(\alpha)$ でなく $g_k(\alpha)$ に対する minor arc 上の評価を使わねばならず，その部分の評価が悪くなるから，Vaughan–Wooley の仕事から直接簡単に滑らかな k 乗数の和に関する結果が得られる，ということにはならない．こういう意味では，“滑らかな数に対する Waring 問題” がとりわけ興味を引くのは，現状では 6 以下の k に対してのみ，といえるであろう．

筆者がこの種の問題に接することとなったきっかけは後述するが，直接関与したのはいまのところ立方数の場合だけであるので，その場合に知られていたことを次に述べることとしよう．

[§] $G(k)$ は，十分大きい自然数が s 個の自然数の k 乗の和となるような，最小の s の値を指す．よって，例えば $G(7) \leq 33$ である，とは，十分大きい自然数は 33 個の自然数の 7 乗の和で表せる，ということである．

[¶] 深入りはしないが，その $c\sqrt{\log n \log\log n}$ の部分をさらに $o(\sqrt{\log n \log\log n})$ なるもので置き換えることは，本質的な困難を伴うことで，現在は，べきの k の値や変数の個数に関わらず，いかなる状況においてもまだできていない．

2. 立方数の場合.

Harcos [6] は，立方数の場合については次の結果を示した：

定理 1 (Harcos [6]) ある正定数cがあって，十分大きい自然数nは，$\exp(c\sqrt{\log n \log\log n})$よりも大きい素因数をもたない9個の自然数の3乗の和として表せる.

3乗数の個数が9より大きい場合にも同様の結果が従うのは自明であって，個数を減らしてどうなるかが次の課題となるが，8個の3乗数の和に対する同様の結果は，Brüdern–Wooley [4] によって得られた：

定理 2 (Brüdern–Wooley [4]) ある正定数cがあって，十分大きいすべての自然数nは，$\exp(c\sqrt{\log n \log\log n})$よりも大きい素因数をもたない8個の自然数の3乗の和として表せる.

これらの結果は circle method を用いて証明されるが，その際，minor arc 上の積分の評価の仕方が議論の中心的な部分となる．その点に関して，Harcos が古典的な Hua の不等式を使ったのに対し，Brüdern–Wooley は，breaking classical convexity device などと呼ばれる Wooley [11] の方法を用いた．この Wooley の方法は高度で，大変面白い技術である.

前節の脚注の一つ[¶]でもちょっと触れたが，ある明確な理由があって，これらの結果における素因数の大きさの上界 $\exp(c\sqrt{\log n \log\log n})$ を，その形よりも実質的に小さいものにすることは，いまのところできない．正定数cの値を問題にしなければ，それは現状における技術的な限界である．よって，当面はこれで8個以上の場合については一応満足すべき結果が得られた，ということになり，次のターゲットは7個の場合となる.

Linnik は十分大きい自然数は7個の立方数の和で表せることを示したが，現在では，その7個のうちの6個を，上記の定理に現れたのと同等の滑らかな数の3乗に制限できることが知られている．この結果自体を証明した文献はないが，それを circle method で証明することは，$g_3(\alpha)$ の6乗平均に対する Wooley の評価(1) があれば，平易な演習問題といえる．この意味では，その結果は事実上 Wooley による，と言っても良いだろうが，技術的には，1980年代後半に発表された Vaughan の方法の範囲内で証明できることでもある．いずれにしても，これらの証明では $f_3(\alpha)$ に対する Weyl の評価(2) も使うから，7個の立方数を全部滑らかなものにすることはできない．そこで次の問題が浮上することになる.

問題. できるだけ小さいθに対して,「十分大きいすべての自然数nは，$n^{\theta/3}$より大きい素因数をもたない7個の自然数$x_1, \cdots, x_7$を用いて，$n = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_7^3$と表せる」ことを示せ.

nがその形で表せれば各x_jは$n^{1/3}$以下だから，$\theta = 1$とできるのは自明である．一方，真実としては，8個以上の場合に対する上の定理達と同様，適当な正定数cに対して，十

分大きい n は，$\exp(c\sqrt{\log n \log\log n})$ より大きい素因数をもたない 7 個の自然数の 3 乗の和として表せるだろうと思われるから，上記の命題は任意の正数 θ に対して成立するだろうと予想される．しかし，現在証明できることは，その予想と比べれば非常に弱いことに過ぎない．

ところで，筆者は以前，概素数 (almost prime) の 3 乗の和について考察し，例えば十分大きい自然数は 7 つの P_4(高々4 つの素数の積) の 3 乗の和で表せることを示した ([7]) が，この論文の出版の過程で，レフェリーから，上記の問題に関してその論文 [7] の方法によって得られる結果について言及してほしい，という意見をいただいた．これを受けて筆者は上記の問題と向き合うことになったわけである．概素数とは，まあ，素因数の個数が少ない数のことで，通常は，小さい素因数をもたない，ということを示すことによって素因数の数が少ないことがわかるわけだが，いずれにしても，概素数と滑らかな数は対極にある概念だと言えよう．言うまでもなかろうが，滑らかな数は小さい素因数しかもたず，素因数の個数は必然的に多いわけである．技術的な面から言えば，しかし，概素数と滑らかな数には実際強い関連がある．

大きい自然数が 7 個の概素数の 3 乗の和で表せることを示す [7] の議論の大筋は，次のようなものである．自然数 n, d に対して，

$$n = x^3 + y_1^3 + \cdots + y_6^3, \qquad x \equiv 0 \pmod d,$$

をみたす自然数 x と (適当に定義された) 概素数 y_1, $\cdots$, y_6 の組の個数を $r(n;d)$ とし，ある適当なパラメーター D と篩の重み $\{\lambda_d\}$ に対して $\sum_{d \le D} \lambda_d r(n;d)$ という形の和が正であることを示す．この和が正である，ということから，小さい素因数をもたないある自然数 x と適当な概素数 y_j に対して先の n の表現が成立することがわかる — そうなるように篩の重みを定義しておくわけである．このようにして，大きい n は 7 個の概素数の 3 乗の和で表せることを示すのだが，この議論の中で y_j 達は(1) のような対応する指数和の平均値の評価を通してしか関係しないので，それらを滑らかな数に置き換えることには何の抵抗もない，どころか，滑らかな数にした方が評価が良くなる．また，篩の重み λ_d の値は 0 か ± 1 だが，[7] の議論の主要部である minor arc 上の積分の評価においては，$|\lambda_d| \ll 1$ ということだけしか使われていないから，例えば λ_d を，$D < d \le 2D$ のときだけ 1，その他の場合は 0，と定義し直しても，何の問題もない．以上の単純な変更を加えて，同じ議論を展開すれば，適当な D に対して $\sum_{D<d\le 2D} r(n;d)$ が正であることが示され，これは，滑らかな数 y_j と，区間 $(D,2D]$ 内に約数をもつ自然数 x を用いて，n が上の形で表せることを意味する．もちろん x は $n^{1/3}$ 以下で，区間 $(D,2D]$ 内に約数をもつわけだから，x の最大の素因数に対する自明でない評価が得られる．この議論において，実際には D は n のある小さいべき乗以下でなければならないという制約があるが，とにかく，このようにして，大きい n が，$n^{1/3}/D$ より大きい素因数をもたない 7 個の自然数の 3 乗の和で表せる，とい

う結果が，概素数の3乗の和に関する仕事の副産物として得られることになる．[7] では，ここに書いたような変更点を記すだけで詳しい証明は略したが，次の結果が証明できることを報告した．

定理 3 (Kawada, [7]) $\theta > \dfrac{2608\sqrt{2833}-106527}{41(8\sqrt{2833}+517)}$ $(= 0.83523\cdots)$ なる任意に固定した θ に対して，十分大きい自然数 n は，$n^{\theta/3}$ より大きい素因数をもたない7個の自然数の3乗の和で表せる．

この θ の限界は，$g_3(\alpha)$ の6乗平均に対する現在最も強い Wooley の結果 [12] と関係する．自明な $\theta = 1$ と比べてもあまり良い結果には見えない感じもするが，これが上記の問題に対する初めての非自明な回答ではある．

3. Switching Principle.

前節の最後の定理は，[7] の簡単な副産物に過ぎないが，その議論にもう一つのアイディアを付加することができる．前節の議論では，滑らかな数 y_j と，区間 $(D, 2D]$ に約数をもつ自然数 x によって，大きい自然数 n を $n = x^3 + y_1^3 + \cdots + y_6^3$ と表せる，ということを示したが，実際，その表し方がわりとたくさんある，ということが示されていたのである．x は $n^{1/3}$ 以下で，$D < n^{1/6}$ なので，$(D, 2D]$ に約数をもつ x の素因数は $n^{1/3}/D$ くらいまで大きくなる可能性はあるが，表現がたくさんあるのだから，最大素因数がもっと小さい x を見つけることもできるのではないか，と期待できる．そのためには，最大素因数が大きい x を使った上のような表現の数は多くない，というような評価を示せばよい．それは，篩の理論において switching principle，あるいは reversal rôle technique などと呼ばれている方法を真似て実現することができる．実際に研究集会で話したときは気付いていなかったのだが，滑らかな数に対する似たような手法は，Balog [1] が2つの滑らかな数の和に関する研究の中で用いていた．

前節で，“y_j 達は(1) のような平均値の評価と関係するだけ” と書いたが，そのため，実は6個の y_j 達のうちの1つについては，どんな条件をつけても議論に影響がない．このことに注意して，次のような方策をとることができるのである．

以下，大きい自然数 n に対して $X = n^{1/3}/D$ とおき，

$$n = (d_1x_1)^3 + (d_2x_2)^3 + y_1^3 + \cdots + y_5^3, \tag{3}$$

という形の表現をいろいろと考えることにするが，ここにとりあえず，

$$\begin{array}{l} d_1,\ d_2 \text{ は } (D, 2D] \text{ 内の自然数，} x_1,\ x_2 \text{ は } X \text{ 以下の自然数，} \\ y_1, \cdots, y_5 \text{ は適当な (例えば定理1にあるような) 滑らかな自然数} \end{array} \tag{4}$$

とする．これらの条件に加えて，さらに x_1, x_2 に関する条件を課し，それらの条件をみたす n の表現の個数を数えることにする．

まず，自然数 x の最大素因数を $P(x)$ と表すことにし，上記の条件(4) に加えて，

$P(x_2) \leq Y$

なる条件をみたす n の表現(3) の個数を $R_1(n)$ で表す．Y は，X より小さくなるように後で定めるパラメーターで，できるだけ小さくとりたいのだが，結局 D よりはずっと大きくとることになる．さて，前頁と同じ議論によって，D について全く同じ条件の下，$R_1(n)$ をわりと精密に計算できる．実際，$y_1, \cdots, y_5$ がすべて十分滑らかなこと，x_1 が幅 X の区間内の自然数をすべて動くこと，の 2 点が，circle method の議論がうまくいくために本質的な部分なのである．とくに，この $R_1(n)$ が正である，というのが定理 3 の証明に他ならない．

この $R_1(n)$ で数えられている n の表現(3) の右辺をみると，x_1 以外は，Y よりも大きい素因数をもたないものであることがわかる．つまり，$R_1(n)$ で数えられている表現における x_1 として，Y よりも大きい素因数をもたない数を選べることを示せれば，Y より大きい素因数をもたない 7 個の自然数の 3 乗の和として n を表せることになる．そこで，$R_1(n)$ が数えるもののうち，x_1 が Y より大きい素因数をもつような表現の個数を $R_2(n)$ とし，その大きさに注目する．つまり，$R_2(n)$ とは，上記の(4) の条件に加えて，

$P(x_1) > Y, P(x_2) \leq Y.$

をみたすような n の表現(3) の個数である．もし $R_1(n) > R_2(n)$ であることを証明できれば，n は，(4) の下，$P(x_1) \leq Y, P(x_2) \leq Y$ なる x_1, x_2 によって(3) の形で表せることになり，Y より大きい素因数をもたない 7 個の自然数の 3 乗の和で n が表せることになる．

しかし，$R_2(n)$ の定義を見ると，$R_1(n)$ の場合の x_1 の役を果たす変数がない．つまり，幅 X の区間内の自然数をすべて動く変数がない．このため，前節の方法では $R_2(n)$ を直接計算することができなくなる．もちろん，$R_2(n)$ を精密に計算する他の方法があればよいわけだが，そんなものがあれば最初から何も苦労なんかしないのである‖．この問題を回避するため，$R_2(n)$ の定義から，$P(x_2) \leq Y$ という条件を除いたものを $R_3(n)$ とする．つまり，条件(4) と，

$P(x_1) > Y$

をみたすような n の表現(3) の個数が $R_3(n)$ である．こうすれば，前と同じ方法で $R_3(n)$ を精密に計算できる．今度は x_2 が幅 X の区間内のすべての自然数を動くからである．そ

‖ちょっと大げさな言い方だが．

して，当然，$R_3(n) \geq R_2(n)$ である．よって，

$$R_1(n) > R_3(n) \tag{5}$$

であることを示せれば，$R_1(n) > R_2(n)$ となり，求めるタイプの結論を得ることができる．

ということで，(5) を示せるような最小の Y を探そう，ということになる．$R_1(n)$ と $R_3(n)$ の定義を見比べると，y_j に関する条件は同じで，$R_1(n)$ の場合の d_1, x_1, d_2 に関する条件は，それぞれ $R_3(n)$ の場合の d_2, x_2, d_1 に関する条件と全く同じである．従って，$R_1(n)$ における $P(x_2) \leq Y$ と，$R_3(n)$ における $P(x_1) > Y$ という条件の違いが，直接 $R_1(n)$ と $R_3(n)$ の大きさに影響することがわかる．実際，

$P(x) \leq Y$ なる，X 以下の自然数 x の個数を $\Psi(X,Y)$,
$P(x) > Y$ なる，X 以下の自然数 x の個数を $\Upsilon(X,Y)$

とすると，大きい n に対して，

$$R_1(n) = \big(\Psi(X,Y) + o(1)\big)F(n), \qquad R_3(n) = \big(\Upsilon(X,Y) + o(1)\big)F(n)$$

という形の漸近式を証明することができる．ここで，$F(n)$ は n^4 くらいの大きさの正数である．従って，$\Psi(X,Y) > \Upsilon(X,Y)$ となるような最小の Y が，(5) をみたす最小の Y であることがわかる．ここで，$\Psi(X,Y) + \Upsilon(X,Y)$ は X 以下の自然数の個数，即ち $X + O(1)$ だから，結局，$\Upsilon(X,Y) < X/2$ となるような最小の Y を求めることになる．これは素数分布論における初歩的な演習問題となる．事実そのような Y は $\sqrt{X}$ よりも小さくできないので，次のように，Mertens の定理から，求める Y の限界を知ることができる．

$$\begin{aligned}
\Upsilon(X,Y) = \sharp\{x \leq X :\ P(x) > Y\} &= \sum_{\substack{Y<p\leq X \\ p:\ \mathrm{prime}}} \ \sum_{\substack{x\leq X \\ x\equiv 0 \pmod p}} 1 \\
&= \sum_{\substack{Y<p\leq X \\ p:\ \mathrm{prime}}} \left(\frac{X}{p} + O(1)\right) \\
&= X \log\left(\frac{\log X}{\log Y}\right) + O(X/\log X).
\end{aligned}$$

これが $X/2$ より小さければいいわけだが，容易にわかるように，

$$\log\left(\frac{\log X}{\log Y}\right) < \frac{1}{2} \iff \frac{\log X}{\log Y} < e^{1/2} \iff Y > X^{e^{-1/2}}.$$

よって，小さい正数 ε に対して $Y = X^{e^{-1/2}+\varepsilon}$ ととるのが，最善の Y の選択である．$X = n^{1/3}/D$ は定理 3 における素因数の大きさの上界であったので，定理 3 における θ の限界は，

この節に記した手順によって，$e^{-1/2}$ の因子の分だけ小さくすることができることになる．これが今回報告させていただく結果である．

定理 4 (Kawada) $\theta > \dfrac{2608\sqrt{2833}-106527}{41(8\sqrt{2833}+517)\sqrt{e}}$ $(= 0.50659\cdots)$ なる任意に固定した θ に対して，十分大きい自然数 n は，$n^{\theta/3}$ より大きい素因数をもたない 7 個の自然数の 3 乗の和で表せる．

最後になりましたが，研究代表者の桂田昌紀先生には，会議中，ならびに，この講究録の原稿の件につきまして，大変寛大にお世話をいただきましたこと，深く御礼申し上げたいと存じます．

References

[1] A. Balog, "On additive representation of integers," Acta Math. Hunger. 54 (1989), 297-301.

[2] A. Balog and A. Sárközy, "On sums of integers having small prime factors, I," Studia Sci. Math. Hungar. 19 (1984), 35-47.

[3] A. Balog and A. Sárközy, "On sums of integers having small prime factors, II," Studia Sci. Math. Hungar. 19 (1984), 81-88.

[4] J. Brüdern and T. D. Wooley, "On Waring's problem for cubes and smooth Weyl sums," Proc. London Math. Soc. (3) 82 (2001), 89-109.

[5] A. Fujii, "An additive problem in theory of numbers," Acta Arith. 40 (1980), 41-49.

[6] G. Harcos, "Waring's problem with small prime factors," Acta Arith. 80 (1997), 165-185.

[7] K. Kawada, "On sums of seven cubes of almost primes," Acta Arith. 117 (2005), 213-245.

[8] R. C. Vaughan, The Hardy-Littlewood method, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1997.

[9] R. C. Vaughan and T. D. Wooley, "Further improvements in Waring's problem," Acta Math. 174 (1995), 147-240.

[10] R. C. Vaughan and T. D. Wooley, "Further improvements in Waring's problem, IV: Higher powers," Acta Arith. 94 (2000), 203-285.

[11] T. D. Wooley, "Breaking classical convexity in Waring's problem: Sums of cubes and quasi-diagonal behaviour," Invent. Math. 122 (1995), 421-451.

[12] T. D. Wooley, "Sums of three cubes," Mathematika 47 (2000), 53-61.